Cournot の寡占市場モデルにおける多段ゲームの収束状況(非線形解析学と凸解析学の研究)

明石, 重男

数理解析研究所講究録
985 巻 1997 年 177-180

Cournot の寡占市場モデルにおける多段ゲームの収束状況

新潟大学理学部数学科　明石重男

1　序論

Cournot により数学的に定式化された複占市場モデルは、企業による商品の生産、及びそれらの市場における消費を記述する時系列現象に対する有効な数学的モデルとして知られている。2 社の企業が交互に商品を生産して市場に送り込む際、十分に時間が経過した後では価格が一定値に収束するという価格均衡の原理や、生産性の劣る小企業でも先手をとって新商品を開発し、生産性の優れた大企業よりも先に商品を市場に送り込むことで、大企業とほぼ同額の純益を得ることができるという先手有効策の原理などはこの Cournot のモデルにより明確に説明され得るものである。しかし、これらの原理を説明する道具となる多段ゲームを構成するために必要な、時間的推移を記述する写像は非線形であり、非拡大写像よりも弱く狭義縮小写像よりも強い広義縮小写像の条件を満たすことが知られている。本稿では、コンパクト距離空間上の広義縮小写像に関する不動点の存在、及び不動点への収束状況を調べる。更にこの結果を Cournot の寡占市場モデルへ応用することにより、多段ゲームの収束状況を調べることを目的とする。

2　コンパクト距離空間上の広義縮小写像に関する不動点の存在及び収束状況

(X,d) をコンパクト距離空間とする。X 上で定義され、X に値をとる非拡大写像 T が、任意の相異なる 2 点 x 及び y に対して、ある自然数 $n_{x,y}$ が存在して

$$d(T^{n_{x,y}}x, T^{n_{x,y}}y) < d(x,y)$$

という条件を満足するとき、広義縮小写像であるという。このとき、次の命題が成立する。

命題. T は唯一つの不動点を有し、任意の $x \in X$ に対して構成される点列 $\{T^n x; n = 1, 2, \ldots\}$ は不動点に収束する。

証明. 最初に、上記条件を満たす T に対して、ある自然数 N が存在して、任意の相異なる 2 点 x 及び y に対して、

$$d(T^N x, T^N y) < d(x,y)$$

が成立することを示す。任意の自然数 n に対して、

$$A_n = \{(x,y); d(T^n x, T^n) < d(x,y)\}$$

と定めたとき、広義縮小写像の仮定により、

$$\{A_n; n = 1, 2, \ldots\}$$

は、 $X \times X$ の開被覆となる。 このとき、 X に関するコンパクト性の仮定により、有限部分開被覆

$$\{A_{n_i}; i = 1, 2, \ldots, k\}$$

が存在する。従って、

$$N = max[n_1, n_2, \ldots, n_k]$$

と定めればよい。
次に、 T が不動点を持つことを背理法を用いて示す。今、 T が不動点を持たないとすると、

$$\{\{x\in X;\ d(x,Tx)>\epsilon\};\ \epsilon>0\}$$

は、 X の開被覆となる。故にある正数 ϵ_0 が存在して、

$$\{x\in X;\ d(x,Tx)>\epsilon_0\}\ =\ X$$

を成立させることができる。 ϵ_{00} を上の条件を満たす ϵ_0 の上限とする。このとき、任意の自然数 n に対して、ある $x_n\in X$ が存在して、

$$\epsilon_{00}\ <\ d(x_n,Tx_n)\ \leq\ \epsilon_{00}+(1/n)$$

が成り立つ。上記条件を満たす点列 $\{x_n;n=1,2,\ldots\}$ が持つ収束部分列の収束先を x_{00} としたとき、

$$d(x_{00},Tx_{00})=\epsilon_{00}$$

が成立しなくてはならないが、この結果は、

$$d(T^Nx_0,T^{N+1}x_0)<\epsilon_{00}$$

を導き、 ϵ_{00} の定義に矛盾する。今、 T の不動点の集合を F としたとき、 F が唯一点から成ることは明らかである。そこで、任意の $x\in X$ を用いて構成される点列 $\{T^nx;n=1,2,\ldots\}$ が、この唯一存在する不動点 p に収束することを示せばよい。今、ある正数δ 及び部分点列 $\{T^{n_k}x;k=1,2,\ldots\}$ が存在して、全ての自然数 k に対して、

$$d(p,T^{n_k}x)\ \geq\ \delta$$

が成立することを仮定してよい。このとき、点列 $\{T^{n_k}x;k=1,2,\ldots\}$ は収束部分列を持つから、その部分列を改めて、$\{T^{n_k}x;k=1,2,\ldots\}$ と書き、その収束先を q で表すことにする。このとき、明らかに、

$$d(p,q)\geq\delta$$

が成り立つ。そこで正数 α を

$$\alpha\ <\ \frac{d(p,q)-d(p,T^Nq)}{2}$$

を満たすように定め、 $T^{n_i}x$ 及び $T^{n_j}x$ を、以下の３条件：

$$n_i\ <\ n_j-N$$

$$d(q,T^{n_i}x)\ <\ \alpha$$

$$d(q,T^{n_j}x)\ <\ \alpha$$

を満足する部分列 $\{T^{n_k}x;k=1,2,\ldots\}$ の要素とする。このとき、

$$\begin{aligned}
d(p,q)\ &\leq\ d(p,T^{n_j}x)+d(T^{n_j}x,q)\\
&\leq\ d(p,T^{n_j-n_i}q)+d(T^{n_j-n_i}q,T^{n_j}x)+d(T^{n_j}x,q)\\
&\leq\ d(p,T^{n_j-n_i}q)+d(q,T^{n_i}x)+d(T^{n_j}x,q)\\
&\leq\ d(p,T^Nq)+2\alpha
\end{aligned}$$

を得るが、これは先に述べた α の選び方に矛盾する。故に証明終了。

3 Cournot の寡占市場モデルにおける多段ゲームの構成

Cournot の寡占市場モデルにおいては、3 社以上の企業が同じ種類の商品を作製して、消費市場に送り込むことを仮定しなくてはならない。しかし市場参入企業数 n を 3 としても一般性を失うことがないため、以下では、市場参入企業数を 3 として議論を進める。

以下では、企業 1、2、3 がそれぞれ同じ種類の商品を作製し、消費市場に送り込んだとき、出回った商品が、市場において完売されることを仮定する。更に、各企業の商品生産量をそれぞれ x_1, x_2, x_3 、商品生産可能領域を数直線上の有界閉区間 S_1, S_2, S_3 、商品 1 個あたりの生産費用を c_1, c_2, c_3 で表すことにする。更に各企業がそれぞれ商品を x_1, x_2, x_3 だけ生産して市場に送り込んだときの市場価格が、

$$p(x_1, x_2, x_3) = a - b(x_1 + x_2 + x_3)$$

という式により決定されることを仮定する。このとき、各企業の純益を表す利得関数 f_1, f_2, f_3 は、

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 p(x_1, x_2, x_3) - c_1 x_1,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 p(x_1, x_2, x_3) - c_2 x_2,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 p(x_1, x_2, x_3) - c_3 x_3$$

として与えられる。今、企業 2 及び 3 が先手をとって、それぞれ商品を x_2 及び x_3 だけ生産し、市場に送り込んだとき、後手となった企業 1 が、自らの純益を最大にするべく生産すべき商品の量を与える関数 r_1 を、企業 1 の企業 2 及び 3 に対する反応関数と呼び、

$$r_1(x_2, x_3) = \{y_1 \in S_1; f_1(y_1, x_2, x_3) = max_{x_1 \in S_1}\} f_1(x_1, x_2, x_3))\}$$

として定義する。一般に r_1 は集合値関数であるが、Cournot の寡占市場モデルに限って述べるならば、f_1 が上に凸の 2 次関数となるため 1 点集合となり、従って 1 価関数とみなして差し支えない。同様にして企業 2 及び企業 3 の反応関数 r $_2$ 及び r_3 も以下の様に

$$r_2(x_1, x_3) = \{y_2 \in S_2; f_2(x_1, y_2, x_3) = max_{x_2 \in S_2}\} f_2(x_1, x_2, x_3))\},$$

$$r_3(x_1, x_2) = \{y_3 \in S_3; f_3(x_1, x_2, y_3) = max_{x_3 \in S_3}\} f_3(x_1, x_2, x_3))\}$$

として与えられる。この寡占市場モデルにおける各企業の反応関数は具体的に次のようになる：

$$r_1(x_2, x_3) = \{\frac{a - 3c_1 + c_2 + c_3}{4b}\},$$

$$r_2(x_1, x_3) = \{\frac{a - 3c_2 + c_1 + c_3}{4b}\},$$

$$r_3(x_1, x_2) = \{\frac{a - 3c_3 + c_1 + c_2}{4b}\}。$$

これら反応関数を用いて、$S_1 \times S_2 \times S_3$ 上で定義され、$S_1 \times S_2 \times S_3$ に値をとる写像 T を

$$T(x_1, x_2, x_3) = (r1(x_2, x_3), r_2(x_1, x_3), r_3(x_1, x_2)), \quad (x_1, x_2, x_3) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

の様に定義する。 d を 3 次元実数空間上の距離としたとき、 T は任意の相異なる 2 点 (x_1, x_2, x_3) 及び (y_1, y_2, y_3) に対して、

$$d(T(x_1, x_2, x_3), T(y_1, y_2, y_3)) < d((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$$

という式を満たす広義縮小写像となり、更に、

$$f_1(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*) = max_{x_1 \in S_1}\} f_1(x_1, x_2{}^*, x_3{}^*)$$

$$f_2(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*) = max_{x_2 \in S_2}\} f_2(x_1{}^*, x_2, x_3{}^*)$$

$$f_3(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*) = max_{x_3 \in S_3}\} f_3(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3)$$

を満たす点として定義される Nash 均衡点 $(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*)$ を不動点に持つ。 Cournot の寡占市場モデルにおける上記均衡点を具体的に求めると以下の通りとなる：

$$x_1{}^* = \frac{a - 3c_1 + c_2 + c_3}{4b}$$

$$x_2{}^* = \frac{a - 3c_2 + c_1 + c_3}{4b}$$

$$x_3{}^* = \frac{a - 3c_3 + c_1 + c_2}{4b}$$

以上の設定を用いて、時点 0 における各企業の生産量の組を $(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0)$ としたときの多段ゲームを帰納的に、

$$(x_1{}^{n+1}, x_2{}^{n+1}, x_3{}^{n+1}) = T(x_1{}^n, x_2{}^n, x_3{}^n)$$

と定めると、 点列 $\{(x_1{}^n, x_2{}^n, x_3{}^n); n = 1, 2, \ldots\}$ は Nash 均衡点に収束することが、前節の命題より導かれるれる。

参考文献

[1]. J. F. Nash, Nonooperative games, Ann. of Math., 54(1951), pp.286-295.

[2]. 鈴木光男, ゲーム理論入門, 共立全書, 1981 年.

[3]. 高橋渉, 非線形関数解析学ー不動点定理とその周辺ー, 近代科学社, 1988 年.

[4]. 田中謙輔, 凸解析と最適化理論, 牧野書店, 1994 年.